

RYSZARD STELLER

Politechnika Wrocławska
Wydział Chemiczny, Zakład Inżynierii i Technologii Polimerów
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
e-mail: ryszard.steller@pwr.wroc.pl

Wpływ zmiany warunków brzegowych na charakterystykę przepływu ślimakowego

Streszczenie — Przeprowadzono teoretyczną analizę wpływu zmiany warunków brzegowych na charakterystykę przepływu cieczy lepkich w kanale ślimaka. Przyjęto dwa skrajne warianty warunków brzegowych: obracający się cylinder i nieruchomy ślimak (A) lub obracający się ślimak i nieruchomy cylinder (B). Analizę przeprowadzono w odniesieniu do modeli kanału płaskiego, pierścieniowego i śrubowego, stosując odpowiednio współrzędne prostokątne, cylindryczne i śrubowe. W przypadku cieczy newtonowskich wykazano, że rozwiązania dotyczące dowolnego kanału i odpowiadające obu wariantom różnią się jedynie członem opisującym obrót ciała sztywnego. Tak więc, obydwa warianty są równoważne, co oznacza, że określające wydajność przemieszczenie cieczy względem powierzchni ślimaka jest niezależne od wyboru warunków brzegowych. W przypadku przepływu cieczy nienewtonowskich w kanale płaskim (zaniedbującym rzeczywistą krzywiznę kanału) występują jednak pewne różnice w charakterystyce przepływu, zależne od wyboru warunków brzegowych. W odniesieniu do kanału pierścieniowego i śrubowego, uwzględniających krzywiznę kanału, różnice takie nie pojawiają się.

Słowa kluczowe: stopione polimery, charakterystyka przepływu, kanał płaski, kanał cylindryczny, kanał śrubowy, zmiana warunków brzegowych.

EFFECT OF CHANGE OF BOUNDARY CONDITIONS ON THE SCREW FLOW CHARACTERISTIC

Summary — Effect of change of boundary conditions on flow characteristic of viscous liquids in screw channel was analyzed theoretically. Two extreme variants of boundary conditions were assumed: rotating barrel and stationary screw (A) or rotating screw and stationary barrel (B). The analyses were performed for the flat, cylindrical or helical channel models using rectangular, cylindrical or helical coordinates, respectively (Fig. 1). In the case of Newtonian liquids it was shown that the solutions for any channel shape and corresponding to both variants of boundary conditions differ only in terms describing the solid body rotation. So both variants are equivalent *i.e.* the liquid displacement in relation to the screw surface, determining the output, is independent of the choice of boundary conditions. In case of the flow of non-Newtonian fluids in the flat channel (neglecting the real channel curvature), however, there are some differences in flow characteristics dependent on the boundary conditions' choice. For cylindrical or helical channels (taking into consideration the channel curvature) such differences do not appear.

Key words: molten polymers, flow characteristic, flat channel, cylindrical channel, helical channel, change of boundary conditions.

Przepływ stopionych polimerów i innych cieczy zarówno newtonowskich, jak i nienewtonowskich w kanale ślimaka (tj. w obszarze między zwojami ślimaka) był już wprawdzie przedmiotem bardzo wielu analiz teoretycznych a także badań doświadczalnych, wciąż jednak ożywają polemiki wzbudzone podważaniem poprawności przyjmowanego powszechnie uproszczonego modelu opisu tego przepływu zakładającego, że ślimak jest nieruchomy a obraca się cylinder. W rzeczywistości bowiem maszyny ślimakowe pracują oczywiście na zupełnie odmiennej zasadzie, tzn. cylinder jest nieruchomy a obraca się ślimak. Dlatego też pewna grupa

badaczy twierdzi, że zmiana warunków brzegowych (czyli przyjęcie modelu z nieruchomym ślimakiem i ruchomym cylindrem lub nieruchomym cylindrem i ruchomym ślimakiem) prowadzi do powstania różnic w obliczeniach wartości natężenia przepływu, czyli zmiany pola przepływu [1–6]. Zdaniem innej grupy badaczy różnice takie jednak nie występują [7–9].

Celem niniejszego artykułu jest wykazanie, że przepływ względem powierzchni ślimaka z uwzględnieniem krzywizny jego kanału jest w zasadzie niezależny od wyboru warunków brzegowych, jednakże w przypadku przepływu cieczy nienewtonowskich pominięcie

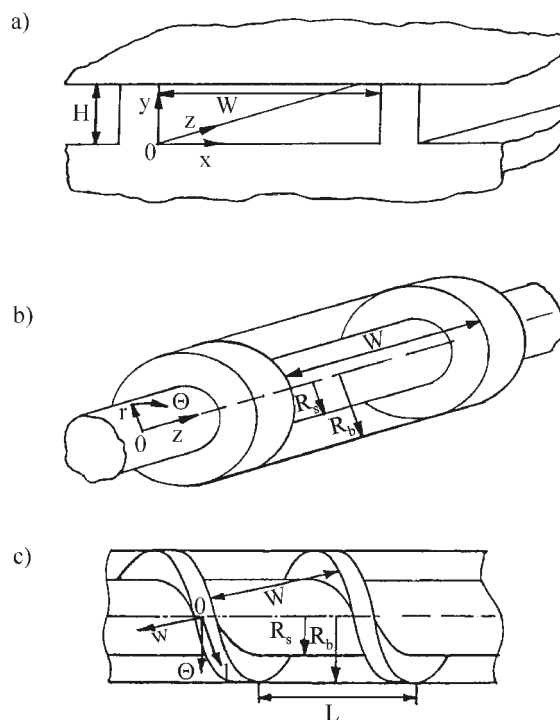
wpływu krzywizny kanału może prowadzić do wystąpienia pewnych (prawdopodobnie niewielkich) różnic wyników obliczeń między tymi modelami.

ZAŁOŻENIA OPISU PRZEPŁYWU W KANALE ŚLIMAKA — ROZWAŻANIA OGÓLNE

Jak wiadomo, transportowanie ślimakowej cieczy, a zwłaszcza cieczy w postaci stopionych polimerów, jest związane z istnieniem dwóch przepływów — przepływu wlezonego (Couette'a) i przepływu ciśnieniowego (Poiseuille'a). W rzeczywistych warunkach pracy wyciarki oba te typy przepływów stanowią efekt względnego ruchu powierzchni ślimaka i cylindra i są ze sobą sprzężone. Przepływ ciśnieniowy wynika z istnienia niezerowego gradientu ciśnienia w kanale, a więc, teoretycznie biorąc, nie jest uwarunkowany występowaniem wspomnianego ruchu względnego. Przepływ taki można bowiem wywołać zachowując nieruchomy zarówno ślimak, jak i cylinder, dzięki odpowiedniemu zwiększeniu ciśnienia (np. za pomocą sprężonego gazu) na wyjściu lub wejściu kanału ślimaka. Do wystąpienia przepływu wlezonego warunkiem koniecznym jest względny ruch powierzchni ślimaka i cylindra a warunkiem wystarczającym jest istnienie tarcia pomiędzy cieczą a powierzchnią ślimaka i cylindra.

Śrubowy kształt kanału ślimaka i nienewtonowskie właściwości stopionych polimerów powodują, że matematyczna analiza transportu ślimakowej cieczy polimerowych jest zadaniem niełatwym. Rzeczywisty kształt kanału ślimaka najlepiej odzworowuje opis przepływu w śrubowym układzie współrzędnych [4, 5, 10, 11]. Zastosowanie tego układu zwiększa jednak trudności rachunkowe, albowiem otrzymywane zależności (nawet w najprostszym przykładzie, tj. cieczy newtonowskiej) są bardziej skomplikowane niż w przypadku modeli wykorzystujących współrzędne prostokątne i cylindryczne. Przybliżenie opisu przepływu we współrzędnych prostokątnych zaniedbuje krzywiznę kanału, przedstawiając go (po „odwinięciu” z rdzenia ślimaka) w postaci płaskiej rynny o przekroju prostokątnym, natomiast przybliżenie opisu przepływu we współrzędnych cylindrycznych uwzględnia wprawdzie krzywiznę kanału, ale modyfikuje jego rzeczywisty kształt, zastępując kanał śrubowy kanałem pierścieniowym. Dotychczasowe doświadczenia wskazują, że najprostszą i najbardziej pogłębioną analizę zjawisk przepływu uzyskuje się stosując współrzędne prostokątne, zwłaszcza w odniesieniu do kanałów płytkich.

Niniejszy artykuł dotyczy próby odpowiedzi na pytanie, czy przyjęcie modelu wytłaczania z obracającym się ślimakiem i nieruchomym cylindrem, bądź też z obracającym się cylindrem i nieruchomym ślimakiem, prowadzi do różnic obliczeniowych wydajności przepływu. Problem ten rozpatruje się poniżej stosując prostokątny (rys. 1a), cylindryczny (rys. 1b) i śrubowy (rys. 1c) układ współrzędnych.



Rys. 1. Układ współrzędnych do opisu przepływu w kanale ślimaka (znaczenia symboli por. dalszy tekst): a) współrzędne prostokątne, b) współrzędne cylindryczne, c) współrzędne śrubowe

Fig. 1. Coordinates systems for description of the flow in a screw channel (for symbols meaning see the further text): a) rectangular coordinates, b) cylindrical coordinates, c) helical coordinates

Z punktu widzenia nieruchomego obserwatora zewnętrznego, transportowanie stopionego polimeru w kanale ślimaka może zachodzić tylko wtedy, gdy występuje ruch powierzchni ślimaka względem powierzchni cylindra lub odwrotnie. Obserwator ten nie dostrzeże bowiem żadnego przepływu, widocznego jako wypływ tworzywa z kanału ślimaka, jeżeli zarówno ślimak, jak i cylinder będą względem niego nieruchome lub będą poruszały się jednocześnie w tym samym kierunku i z taką samą prędkością jako ciało sztywne. Względność ruchu powierzchni cylindra i ślimaka przedstawiają dwa skrajne warianty dostrzegane przez obserwatora:

— A) ślimak jest nieruchomy, a cylinder obraca się z prędkością kątową ω ;

— B) cylinder jest nieruchomy, a ślimak obraca się z taką samą prędkością kątową ω .

Wariant A, mimo, że teoretycznie możliwy, jest w praktyce niespotykany. Natomiast wariant B określa rzeczywiste warunki pracy wyciarki. Istniejące przypadki pośrednie dotyczą sytuacji, w której cylinder i ślimak obracają się z różnymi prędkościami ω_1 i ω_2 oraz $|\omega_1 - \omega_2| = \omega$.

W dalszej części artykułu warianty A i B zostaną szczegółowo przeanalizowane z zastosowaniem wspomnianych trzech układów współrzędnych związa-

nych z obserwatorem zewnętrznym, w odniesieniu do izotermicznego, w pełni rozwiniętego przepływu cieczy lepkich (newtonowskich lub nienewtonowskich) z zaniedbaniem sił bezwładności oraz sił masowych. Przedmiotem rozważań będzie przy tym wyłącznie przepływ wzdłuż osi kanału ślimaka, determinujący wydajność wytłaczania.

PRZEPŁYW CIECZY W KANAŁE PŁASKIM

Przepływ w kanale płaskim jest opisywany w prostokątnym (kartezjańskim) układzie współrzędnych, którego bazę stanowią wzajemnie prostopadłe (ortogonalne) wektory położone na osiach x , y , z (por. rys. 1a). Stosując ogólnie przyjęte założenia upraszczające [7, 12], składową równania ruchu opisującą zmiany prędkości przepływu cieczy lepkich wzdłuż osi z kanału jako funkcję położenia w przekroju kanału (x, y) przedstawia równanie

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (1a)$$

$$\text{przy czym} \quad 0 \leq x \leq W \quad (1b)$$

$$\text{oraz} \quad R_s \leq y \leq R_b \quad (1c)$$

gdzie: v_z — *składowa wektora prędkości*, $\partial P/\partial z$ — *składowa gradientu ciśnienia*, η — *lepkość*, W — *szerokość kanału*, R_b — *promień cylindra (równy promieniowi zewnętrznemu ślimaka)*, R_s — *promień rdzenia ślimaka*.

Wyrażenia podane w nawiasach [równanie (1a)], są składowymi tensora naprężeń wynikającymi z ogólnego równania konstytutywnego cieczy lepkiej. Przedstawienie zależności dotyczących przepływu w kanale płaskim z zastosowaniem symboliki stosowanej zwykle w odniesieniu do współrzędnych cylindrycznych i śrubowych prowadzi do nierówności (1c) (por. rys. 1a—1c). Przejścia do tradycyjnego (wg rys. 1a) sposobu zapisu można dokonać za pomocą podstawień:

$$y' = y - R_s \quad (2a)$$

$$H = R_b - R_s \quad (2b)$$

gdzie: H — *wysokość kanału*.

Równanie (1a) można rozwiązać dla wariantu zarówno A, jak i B. W wariantcie A, powszechnie stosowanym w obliczeniach, warunki brzegowe przybierają postać [7, 12]:

$$v_z^A(0, y) = 0 \quad (3a)$$

$$v_z^A(W, y) = 0 \quad (3b)$$

$$v_z^A(x, R_s) = 0 \quad (3c)$$

$$v_z^A(x, R_b) = \omega_z R_b \quad (3d)$$

$$\omega_z = \omega \cos \lambda \quad (3e)$$

Wyrażenie (3e), w którym λ jest średnim kątem wzniosu linii śrubowej, określa składową wektora prędkości kątowej skierowaną równoległe do osi kanału ślimaka.

W przypadku cieczy newtonowskiej ($\eta = \text{const}$) prędkość przepływu może być wyrażona jako suma prędkości przepływu ciśnieniowego i wlezonego. Znane od dawna rozwiązanie równania (1a) spełniające warunki brzegowe (3a)—(3e) ma postać [7, 12]:

$$v_z^A(x, y) = v_{zp}^A(x, y) + v_{zd}^A(x, y) \quad (4)$$

$$v_{zp}^A(x, y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \{ (y - R_s)(y - R_b) + \alpha \} \quad (5a)$$

$$\alpha = \frac{8(R_b - R_s)^2}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cosh \left[\frac{i\pi(2x - W)}{2(R_b - R_s)} \right]}{i^3 \cosh \left[\frac{i\pi W}{2(R_b - R_s)} \right]} \sin \left[\frac{i\pi(y - R_s)}{(R_b - R_s)} \right] \quad (5b)$$

$$v_{zd}^A(x, y) = \frac{4\omega_z R_b}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sinh \left[\frac{i\pi}{W} (y - R_s) \right]}{i \sinh \left[\frac{i\pi}{W} (R_b - R_s) \right]} \sin \left[\frac{i\pi x}{W} \right] \quad (6)$$

Równania (5) i (6) odnoszą się do przepływu odpowiednio ciśnieniowego i wlezonego. W wariantcie B warunki brzegowe mają postać:

$$v_z^B(0, y) = -\omega_z y \quad (7a)$$

$$v_z^B(W, y) = -\omega_z y \quad (7b)$$

$$v_z^B(x, R_s) = -\omega_z R_s \quad (7c)$$

$$v_z^B(x, R_b) = 0 \quad (7d)$$

Z równań (7a) i (7b) wynika, że punkty położone na ścianach bocznych kanału ślimaka obracają się z tym większą prędkością liniową, im większa jest ich odległość od osi ślimaka. Znak minus w równaniach wyraża względność ruchu (obrót ślimaka „widziany” przez obserwatora musi mieć kierunek przeciwny niż obrót cylindra).

Rozwiązanie równania (1a) z warunkami brzegowymi (7) ma postać:

$$v_z^B(x, y) = -\omega_z y + v_z^A(x, y) \quad (8)$$

Dla potwierdzenia wystarczy podstawić zależność (8) do równania (1a) przyjmując, że $\eta = \text{const}$ oraz że $v_z^A(x, y)$ spełnia równanie (1a). Dodatkowo można też sprawdzić, że wzór (8) przekształca wzajemnie warunki brzegowe (3) i (7), co oznacza, że rozwiązania dotyczące wariantów A oraz B różnią się tylko członem opisującym obrót ciała sztywnego.

Równanie (8) jest słuszne w przypadku przepływu cieczy newtonowskiej w kanale o dowolnej szerokości

W , a więc również o szerokości nieskończenie wielkiej; można wówczas zaniedbać wpływ ścian bocznych i zastosować model przepływu między równoległymi płytami. Oznacza to, że prędkość staje się funkcją tylko współrzędnej y . Przechodząc do granicy $W \rightarrow \infty$ w wyrażeniach (5) i (6), bądź rozwiązując równanie (1a) z pominięciem składników zależnych od współrzędnej x oraz uwzględniając warunki brzegowe:

dla wariantu A:

$$v_z^A(R_s) = 0 \quad (9a)$$

$$v_z^A(R_b) = \omega_z R_b \quad (9b)$$

oraz dla wariantu B:

$$v_z^B(R_s) = -\omega_z R_s \quad (10a)$$

$$v_z^B(R_b) = 0 \quad (10b)$$

otrzymuje się odpowiednio:

$$v_z^A = R_b \omega_z \frac{y - R_s}{R_b - R_s} - \frac{(y - R_s)(R_b - R_s) - (y - R_s)^2}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (11)$$

$$v_z^B = R_s \omega_z \frac{y - R_b}{R_b - R_s} - \frac{(y - R_s)(R_b - R_s) - (y - R_s)^2}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (12)$$

Nietrudno wykazać, że równania (11) i (12) spełniają, zgodnie z oczekiwaniami, zależność (8) wiążącą rozwiązania dotyczące wariantów A i B. Ponadto, przepływ ciśnieniowy jest (tak jak się należało spodziewać) taki sam w obu wariantach. Jest on też symetryczny względem wyboru granic, co oznacza, że zamiana miejscami indeksów b oraz s w równaniu (5) lub w członach równania (11) i (12) zawierających gradient ciśnienia, nie zmienia tych wyrażeń. Potwierdza to poprzednią uwagę, że przepływ ciśnieniowy jest niezależny od ruchu i określenia ścian ślimaka i cylindra (tj. przypisania danej ściany ślimakowi lub cylindrowi).

Wartość lepkości η w równaniu (1a) w odniesieniu do nienewtonowskiej cieczy lepkiej (określanej często mianem uogólnionej cieczy newtonowskiej) nie jest stała, dlatego też nie można jej wyprowadzić poza znak pochodnej. Rozwiązania równania (1a) z warunkami brzegowymi (3) (wariant A) w przypadku cieczy nienewtonowskich są znane tylko w postaci numerycznej [13], ponieważ nie wyrażają się za pomocą funkcji elementarnych. Niech v_z^A będzie rozwiązaniem równania (1a) dla pewnej cieczy nienewtonowskiej, spełniającym warunki brzegowe (3). Podstawiając zależność (8) odpowiadającą wariantowi B do równania (1a) otrzymuje się:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_z^A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_z^A}{\partial y} \right) - \omega_z \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad (13)$$

Z równania (13) wynika, że zależność $v_z^B = -\omega_z y + v_z^A$ ogólnie nie spełnia równania (1a). Jest ono spełnione tylko wówczas, kiedy $\omega_z = 0$, tj. gdy brak jest przepływu

włeczonego, a istnieje tylko przepływ ciśnieniowy lub gdy lepkość η nie zależy od współrzędnej y . Ten ostatni przypadek obejmuje ciecz newtonowską ($\eta = const$), a także sam przepływ włeczony w kanale o dużej szerokości lub małej głębokości (między równoległymi płytami). Równanie (1a) upraszcza się wtedy do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = 0 \quad (14a)$$

gdzie

$$\eta = \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad (14b)$$

Całkowanie równania (14a) prowadzi do równania algebraicznego

$$\eta \frac{\partial v_z}{\partial y} = c \quad (14c)$$

w którym niewiadomą jest gradient prędkości (szybkość ścinania).

Z równania (14c) wynika, że i gradient prędkości, i lepkość są stałe, a ściślej są niezależne od y . Całkując gradient prędkości z warunkami brzegowymi (9) lub (10) otrzymuje się odpowiednio:

$$v_z^A = R_b \omega_z \frac{y - R_s}{R_b - R_s} \quad (15a)$$

$$v_z^B = R_s \omega_z \frac{y - R_b}{R_b - R_s} \quad (15b)$$

Zatem są to zależności identyczne jak w przypadku przepływu włeczonego cieczy newtonowskiej [por. wzory (11) i (12)].

Reasumując, należy stwierdzić, że w warunkach przepływu cieczy nienewtonowskich w kanale płaskim zależność (8) nie jest ogólnie spełniona. W razie przepływu w kanale o nieskończenie wielkiej szerokości, z założeniem, że przepływ całkowity stanowi prostą sumę przepływu ciśnieniowego i włeczonego (tj. gdy te przepływy nie są sprzężone) równanie (8) jest w przybliżeniu spełnione. Natomiast pozostaje kwestią otwartą czy zachodzi to również w kanale o skończonej szerokości; sprawdzenie tego wymagałoby zastosowania metod numerycznych.

Tak więc należy stwierdzić, że opis przepływów cieczy nienewtonowskich w modelu płaskiego kanału ślimaka może spowodować powstawanie ilościowych różnic charakterystyk roboczych, w zależności od zastosowanego wariantu A lub B. Zachowanie cieczy nienewtonowskich w kanale płaskim jest rezultatem nieadekwatności tego modelu wynikającej z pominięcia krzywizny kanału. Potwierdza to przedstawiona poniżej analiza przepływów w kanałach pierścieniowym i śrubowym.

PRZEPIWYW CIECZY W KANAŁE PIERŚCIENIOWYM

Model pierścieniowego kanału ślimaka jest przedstawiony w cylindrycznym układzie współrzędnych, którego bazę stanowią trzy wzajemnie prostopadłe wektory: normalny r (w kierunku promieniowym), styczny θ (w kierunku obwodowym) oraz osiowy z (w kierunku

osi ślimaka). Pokazano je na rys. 1b wraz z innymi cechami geometrycznymi kanału. Składowa równania ruchu w kierunku θ , opisująca prędkość wzdłuż kanału ślimaka jako funkcję położenia (r, z) w przekroju kanału przybiera postać:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\eta r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (16a)$$

$$\text{przy czym} \quad 0 \leq z \leq W \quad (16b)$$

$$R_s \leq r \leq R_b \quad (16c)$$

W wariancie A muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$v_\theta^A(r, 0) = 0 \quad (17a)$$

$$v_\theta^A(r, W) = 0 \quad (17b)$$

$$v_\theta^A(R_s, z) = 0 \quad (17c)$$

$$v_\theta^A(R_b, z) = \omega_\theta R_b \quad (17d)$$

gdzie:

$$\omega_\theta = \omega \cos \lambda \quad (17e)$$

Wyrażenie (17e) [odpowiednik zależności (3e) we współrzędnych prostokątnych] wynika z ogólnego założenia modelu kanału pierścieniowego, zgodnie z którym cylinder wykonuje nie tylko ruch obrotowy, ale także ruch liniowy względem nieruchomego ślimaka.

W wariancie B warunki brzegowe są następujące:

$$v_\theta^B(r, 0) = -\omega_\theta r \quad (18a)$$

$$v_\theta^B(r, W) = -\omega_\theta r \quad (18b)$$

$$v_\theta^B(R_s, z) = -\omega_\theta R_s \quad (18c)$$

$$v_\theta^B(R_b, z) = 0 \quad (18d)$$

O istnieniu rozwiązania $v_\theta^A(r, z)$ równania (16a) spełniającego warunki brzegowe (17) — w przypadku przepływu cieczy newtonowskiej ($\eta = \text{const}$) w kanale o skończonej szerokości — wspomina Tadmor [7]. Rozwiązanie to jest strukturalnie bardzo podobne do wyrażenia (4) (kanał płaski). Tadmor jednak, ze względu na długie i żmudne rachunki, nie przytacza dokładnego rozwiązania, podaje tylko współczynniki kształtu F_p oraz F_d dotyczące przepływu ciśnieniowego i wleczonego, będące końcowym rezultatem całkowania profilu prędkości w kanale. Oba wyrażenia są znacznie bardziej skomplikowane (opierają się na różnego rodzaju funkcjach Bessela), niż analogiczne wyrażenia na F_p oraz F_d odnoszące się do kanału płaskiego [7, 12], a otrzymane w wyniku całkowania zależności (5) i (6). Zatem nie trudno zauważyć, że spełniające warunki brzegowe (18), rozwiązanie równania (16a) dla cieczy newtonowskiej musi mieć postać:

$$v_\theta^B(r, z) = -\omega_\theta r + v_\theta^A(r, z) \quad (19)$$

przy czym $v_\theta^A(r, z)$ jest dane wspomnianym rozwiązaniem Tadmora.

Dla potwierdzenia zależności (19) wystarczy podstawić ją do równania (16a) przyjmując, że $v_\theta^A(r, z)$ jest także jego rozwiązaniem.

Jeżeli założymy istnienie rozwiązania $v_\theta^A(r, z)$ spełniającego warunki brzegowe (17) w przypadku przepływu lepkiej cieczy nienewtonowskiej w pierścieniowym kanale ślimaka o dowolnej szerokości to, podobnie jak w przypadku cieczy newtonowskiej, można dowieść słuszności wyrażenia (19) dla każdej uogólnionej cieczy newtonowskiej (czyli lepkiej cieczy nienewtonowskiej). Stąd wniosek, że w odniesieniu do kanału pierścieniowego wyrażenie (19) określa wzajemne przekształcenie rozwiązań w wariantach A oraz B w przypadku dowolnej cieczy lepkiej.

Przepływ w kanale płaskim stanowi graniczny przypadek przepływu w kanale zakrzywionym, kiedy to wartość $1/r$ odpowiadająca krzywiznie kanału dąży do zera (czyli $r \rightarrow \infty$). W wyniku przekształcenia pierwszego składnika sumy z lewej strony równania (16a) otrzymuje się:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \Delta = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (20a)$$

$$\text{gdzie} \quad \Delta = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \frac{1}{r} - \eta \frac{v_\theta}{r^2} - \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{v_\theta}{r} \quad (20b)$$

$$\text{oraz} \quad dx = r d\theta \quad (20c)$$

Jak widać, gdy $r \rightarrow \infty$, $\Delta \rightarrow 0$, a równanie (20a), po odpowiednim przemianowaniu zmiennych, staje się strukturalnie identyczne z równaniem (1a) we współrzędnych prostokątnych. W celu uzyskania rozwiązania we współrzędnych prostokątnych opierającego się na zależności (19) (słusznej we współrzędnych cylindrycznych) należałoby również dokonać wspomnianego przejścia granicznego ($r \rightarrow \infty$). Jest to jednak niemożliwe, gdyż matematyczne „prostowanie kanału” (dla każdej skończonej prędkości kątowej rotacji ω_θ) powoduje, że człon $-\omega_\theta \cdot r$ opisujący ruch ciała sztywnego staje się nieskończenie duży. Do nieskończoności dążyłyby też prędkości poszczególnych ścian. Przybliżenie w modelu kanału płaskiego jest więc słuszne jedynie dla nieskończonej małej prędkości kątowej, podczas gdy w modelowaniu przyjmuje się jej skończoną wartość. Zrozumiała staje się również postawiona już teza, że zależność (8) opisująca przepływ cieczy nienewtonowskich w kanale płaskim jest słuszna tylko w warunkach addytywności przepływu ciśnieniowego i wleczonego. Założenie takie jest uzasadnione bowiem jedynie w przypadku bardzo małej różnicy prędkości ruchu ścian, tzn. wówczas, gdy przepływ całkowity ma charakter *quasi*-newtonowski. Ciecze newtonowskie ściśle podlegają takiej addytywności, stąd też spełniają one równanie (8) bez ograniczeń. Powyższe rozważania potwierdzają już uprzednio sformułowany wniosek, że różnice w zachowaniu się

cieczy w wariantach A i B obserwowane w odniesieniu do modelu kanału płaskiego są wynikiem nieadekwatności tego modelu, związanej z pominięciem krzywizny kanału ślimaka.

PRZEPIY W CIECZY W KANAŁE ŚRUBOWYM

Jak już wspomniano, najbardziej adekwatny obraz przepływu w kanale ślimaka uzyskuje się stosując współrzędne śrubowe (rys. 1c). Naturalną bazę układu śrubowego stanowią: wektor normalny (promieniowy) r (przechodzi przez punkt 0 prostopadle do płaszczyzny rysunku, nie został więc na nim zaznaczony), wektor styczny θ (w kierunku obwodowym) oraz wektor śrubowy l (zgodny z kierunkiem linii śrubowej kanału). Wektory θ oraz l są nieortogonalne, a kąt między nimi jest równy kątowi wzniosu linii śrubowej λ . W wielu zastosowaniach wprowadza się także ortogonalną bazę fizyczną utworzoną przez wektory r , w oraz l , przy czym wektor w (w kierunku prostopadłym do ścian kanału śrubowego) określa iloczyn wektorowy wektorów r oraz l . Dalsze rozważania dotyczące kanału śrubowego będą prowadzone w takiej właśnie bazie fizycznej. Zgodnie z równaniem (10) (przepływ cieczy lepkiej w kanale o dużej szerokości) składowa równania ruchu wzdłuż osi kanału ślimaka (l) przybiera postać:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(r\varphi)^2}} \frac{\partial P}{\partial l} = \frac{\partial \tau_{lr}}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} + \frac{r\varphi^2}{1+(r\varphi)^2} \right] \tau_{lr} \quad (21)$$

$$\text{oraz} \quad \tau_{lr} = \eta \left[\frac{\partial v_l}{\partial r} - \frac{2\varphi}{1+(r\varphi)^2} v_w - \frac{r\varphi^2}{1+(r\varphi)^2} v_l \right] \quad (22)$$

gdzie: v_l i v_w — odpowiednio podłużna i poprzeczna składowa prędkości w kanale, $\partial P/\partial l$ — podłużna składowa gradientu ciśnienia, τ_{lr} — składowa tensora naprężenia.

Spiralność kanału określa parametr

$$\varphi = \frac{2\pi}{L} \quad (23)$$

gdzie: L — skok zwoju.

Dla $L \rightarrow \infty$ lub $L \rightarrow 0$ współrzędne śrubowe przechodzą we współrzędne cylindryczne.

W odróżnieniu od współrzędnych prostokątnych i cylindrycznych, składowa naprężenia (22) zależy od prędkości przepływu zarówno wzdłużnego, jak i poprzecznego. Dlatego też warunki brzegowe dla prędkości należy sformułować w odniesieniu do obu jej składowych. Mianowicie:

wariant A

$$v_l^A(R_b) = \omega R_b \cos \lambda_b = \omega \frac{R_b^2 \varphi}{\sqrt{1+(R_b \varphi)^2}} \quad (24a)$$

$$v_l^A(R_s) = 0 \quad (24b)$$

$$v_w^A(R_b) = \omega R_b \sin \lambda_b = \omega \frac{R_b}{\sqrt{1+(R_b \varphi)^2}} \quad (25a)$$

$$v_w^A(R_s) = 0 \quad (25b)$$

oraz wariant B

$$v_l^B(R_b) = 0 \quad (26a)$$

$$v_l^B(R_s) = -\omega R_s \cos \lambda_s = -\omega \frac{R_s^2 \varphi}{\sqrt{1+(R_s \varphi)^2}} \quad (26b)$$

$$v_w^B(R_b) = 0 \quad (27a)$$

$$v_w^B(R_s) = -\omega R_s \sin \lambda_s = -\omega \frac{R_s}{\sqrt{1+(R_s \varphi)^2}} \quad (27b)$$

Jak już wspomniano, parametr λ w równaniach (24—27) jest kątem pomiędzy kierunkiem stycznym θ a osią kanału l , który określa zależność:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{1}{r\varphi} \quad (27c)$$

W przeciwieństwie do współrzędnych prostokątnych i cylindrycznych, gdzie kąt λ jest stały, we współrzędnych śrubowych jest on więc zależny od współrzędnej promieniowej r . Ujemne znaki w wyrażeniach (26) i (27) wynikają z konieczności zachowania względności ruchu, podobnie jak w przypadku kanału płaskiego i pierścieniowego.

Rozwiązania równania ruchu (21) i (22) w odniesieniu do cieczy newtonowskiej zarówno w wariantach A, jak i B przedstawiono w pracach [4, 5, 11]. Nie uzyskano dotychczas takich rozwiązań równania odnoszącego się do cieczy nienewtonowskich, a także równania opisującego przepływ w kanale o skończonej szerokości. Nie jest to jednak konieczne w celu wykazania, że w odniesieniu do dowolnej cieczy lepkiej rozwiązania w wariantach A i B są połączone następującymi zależnościami:

$$v_l^B(r) = -\omega \frac{r^2 \varphi}{\sqrt{1+(r\varphi)^2}} + v_l^A(r) \quad (28a)$$

$$v_w^B(r) = -\omega \frac{r}{\sqrt{1+(r\varphi)^2}} + v_w^A(r) \quad (28b)$$

Poprawność relacji (28) potwierdza podstawienie ich do równania (22), w wyniku czego otrzymuje się tę samą postać składowej tensora naprężenia, zatem i składowej równania ruchu (21). Prawidłowo także przekształcając one odpowiednie warunki brzegowe (24—27) w odniesieniu do wariantów A i B.

Z zależności (28) wynika, że podłużna i poprzeczna składowe prędkości, stanowiące rozwiązania równań ruchu we współrzędnych śrubowych (warianty A i B) w przypadku przepływu dowolnej cieczy lepkiej, różnią się jedynie członem opisującym obrót ciała sztywnego, zatem nie występują różnice obliczeniowe charakterystyk roboczych w obu wariantach.

Zależności (8), (19) i (28) dowodzą, że niezależnie od przyjętego rodzaju układu współrzędnych oraz reologicznych właściwości cieczy polimerowej rozwiązania

wariantów A lub B różnią się tylko parametrem opisującym ruch ciała sztywnego. Mianowicie, przepływ cieczy (np. stopionego polimeru) w kanale ślimaka oznacza, że przemieszcza się ona względem powierzchni ślimaka a nie względem obserwatora zewnętrznego. Stąd też w wariacie A obserwator widzi nieruchomy ślimak, dostrzega więc przemieszczanie się polimeru względem powierzchni ślimaka wywołane ruchem obrotowym cylindra. W wariacie B obserwator rejestruje zarówno ruch obrotowy ślimaka, jak i przemieszczanie się polimeru względem jego powierzchni. Stąd też rzeczywisty, obserwowany wówczas ruch polimeru jest sumą obu wspomnianych ruchów.

Można to zrozumieć eliminując (teoretycznie) przepływ wleczony poprzez pominięcie w rozważaniach adhezji polimeru do ściany cylindra (polimer „ślizga się” wtedy po niej bez tarcia). W takim przypadku materiał znajdujący się w kanale obracającego się ślimaka będzie wykonywał ruch obrotowy jako ciało sztywne, natomiast w wariacie A (obracającego się cylindra) pozostanie w bezruchu. W obu wariantach, w warunkach braku adhezji, nie nastąpi jednak przemieszczenie polimeru względem powierzchni ślimaka. Z zewnątrz zauważalna będzie natomiast różnica w szybkości przepływu, równa dodatkowemu członowi w równaniach (8), (19) i (28) (o postaci zależnej od zastosowanego układu współrzędnych) wiążącemu rozwiązania w wariantach A oraz B.

Różnica ta przestanie być widoczna, jeżeli przeniesimy obserwatora na obracający się ślimak, nie będzie on bowiem wtedy dostrzegał ruchu własnego ślimaka, a zaobserwuje ruch powierzchni cylindra względem powierzchni ślimaka, co odpowiada wariantowi A.

Powyższe rozważania oddają sens fizyczny zależności (8), (19) i (28) świadcząc równocześnie o tym, że ruch polimeru w kanale ślimaka, określane względem jego powierzchni, nie zależy od przyjętego modelu — A lub B — jeżeli prędkość kątowna w obu tych wariantach jest jednakowa. Jednakże przestrzenny opis ruchu stopionego polimeru w układzie zawierającym nieruchomy ślimak i ruchomy cylinder (wariant A) jest prostszy, o czym wspomniano już na początku niniejszego artykułu.

PODSUMOWANIE

Teoretyczna analiza przepływu stopionego polimeru w kanale ślimaka przeprowadzona w odniesieniu do zmiennych warunków brzegowych, tzn. do założenia bądź nieruchomego cylindra i obracającego się ślimaka,

bądź też sytuacji odwrotnej, częściowo potwierdziła sugestie niektórych badaczy, że przyjęcie takich odmiennych warunków brzegowych prowadzi do powstania różnic obliczeniowych natężenia przepływu. Jednak różnice takie obserwuje się jedynie w opisie przepływu lepkiej cieczy nienewtonowskich w kanale płaskim (we współrzędnych prostokątnych). Stwierdzono, że są one wynikiem nieadekwatności modelu kanału płaskiego, z założenia zaniedbującego krzywiznę kanału. Istotny wpływ na ten fakt mają też nienewtonowskie właściwości cieczy polimerowej, które prowadzą do sprzężenia przepływów ciśnieniowego i wleczonego. W przypadku cieczy newtonowskiej wspomniane sprzężenie nie występuje, tzn. przepływ całkowity w kanale jest sumą przepływu ciśnieniowego i wleczonego, a natężenie przepływu nie zależy od wyboru warunków brzegowych. Stwierdzenie to dotyczy również przepływu dowolnej cieczy lepkiej w kanale pierścieniowym (współrzędne cylindryczne) i śrubowym (współrzędne śrubowe), wymienione współrzędne uwzględniają bowiem krzywiznę kanału.

LITERATURA

1. Campbell G. A., Sweeney P. A., Felton J. R.: *SPE Antec Tech. Papers* 1991, **37**, 219.
2. Tamura M. S., Henderson J. M., Powell R. L., Shoemaker C. F.: *J. Food Process Eng.* 1993, **16**, 93.
3. Sikora R., Sasimowski E.: *Polimery* 1999, **44**, 600.
4. Sikora R., Sasimowski E.: *Int. Polym. Proc.* 2000, **15**, 1.
5. Sikora R., Sasimowski E.: *Polimery* 2000, **45**, 141.
6. Sikora R., Sasimowski E.: *Int. Polym. Proc.* 2003, **18**, 235.
7. Tadmor Z., Klein I.: „Engineering Principles of Plasticating Extrusion”, Van Nostrand, New York 1970.
8. Torner R. V.: „Teoreticheskie osnovy pererabotki polimerov”, Khimia, Moskwa 1977.
9. Rauwendaal C., Osswald T. A., Tellez G., Gramann P. J.: *Int. Polym. Proc.* 1998, **13**, 327.
10. Yu Q. P., Hu G. H.: *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 1997, **69**, 155.
11. Yu Q. P., Hu G. H.: *Polym. Eng. Sci.* 1998, **38**, 819.
12. McKelvey J. M.: „Polymer Processing”, Wiley, New York 1962.
13. O'Brien K. T.: „Applications of Computer Modeling for Extrusion and Other Continuous Polymer Processes”, Hanser Publishers, New York 1992.

Otrzymano 10 VI 2005 r.